Автоматика и телемеханика, № 7, 2024

Нелинейные системы

© 2024 г. **А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com),**
Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Рассматривается задача стабилизации интегратора третьего порядка с фазовым ограничением на третью переменную состояния. Синтезировано непрерывное ограниченное управление в виде вложенных сигмоид, гарантирующее выполнение фазового ограничения. Построена функция Ляпунова, с помощью которой установлены условия на коэффициенты обратной связи, при выполнении которых замкнутая система глобально устойчива. Изложение иллюстрируется численными примерами.

Ключевые слова: стабилизация цепочки трех интеграторов, глобальная устойчивость, фазовое ограничение, вложенные сигмоиды, функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231024070032, **EDN:** XRVPFU

1. Введение

Рассматривается задача стабилизации цепочки трех интеграторов с помощью непрерывного управления при дополнительном условии выполнения фазового ограничения на переменные состояния. Стабилизация цепочек интеграторов – актуальная задача теории управления, широко обсуждающаяся в литературе в течение нескольких последних десятилетий (см., например, [1, 2] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике объясняется тем, что во многих приложениях исходные модели заданы в виде цепочек интеграторов, а управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем.

Среди множества стабилизирующих управлений, применяемых для решения этой задачи, можно выделить класс обратных связей в виде вложенных как гладких, так и негладких функций насыщения [2–14]. Интерес к обратным связям такого рода обусловлен тем, что они позволяют автоматически учесть ограниченность ресурса управления и при этом обеспечить выполнение определенных фазовых ограничений, что особенно важно вдали от положения равновесия, а также гарантируют экспоненциальную скорость убывания отклонения вблизи положения равновесия [3–7]. Отметим также использование таких обратных связей в задачах, связанных с настройкой коэффициентов в робастных законах управления [8].

Применение обратных связей в виде вложенных функций насыщения приводит к исследованию достаточно сложной нелинейной системы или, в случае негладкой функции насыщения – сатуратора, линейной системы с переключениями, анализ устойчивости которых представляет нетривиальную задачу. Доказать глобальную устойчивость удается преимущественно для систем второго порядка с вложенными сатураторами [3, 5, 9] и вложенными сигмоидами [3, 10]. Практически во всех работах, где рассматриваются системы третьего или выше порядков, доказывается только локальная устойчивость [3, 4, 11, 12]. При отказе от требования непрерывности управления в редких случаях обратных связей специального вида удается доказать глобальную устойчивость для систем третьего [12] (кусочно-непрерывное управление) или четвертого [13] (импульсное управление) порядков. Задача глобальной устойчивости для общего случая n вложенных сатураторов рассматривалась, насколько известно авторам, только в работах А. Тила [2, 14]. Однако доказать глобальную устойчивость А. Тилу удалось только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным, на практике редко выполнимым, неравенствам [2, Theorem 2.1]. Авторам не известны работы (за исключением вышеупомянутых статей А. Тила), в которых доказывается глобальная устойчивость систем третего или выше порядков, стабилизируемых с помощью непрерывного управления, гарантирующего выполнение фазового ограничения.

Функцией насыщения называют непрерывную неубывающую функцию $S(x)$ скалярной переменной, имеющую конечные пределы при $x \to \pm\infty$. Среди функций насыщения можно выделить класс гладких строго возрастающих функций, называемых сигмоидами [15]. В литературе можно найти различные, незначительно отличающиеся друг от друга определения сигмоид. Здесь будет использоваться следующее.

Определение 1. Сигмоидой называется гладкая строго возрастающая нечетная функция скалярной переменной $\sigma(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\sigma(x) \to \pm 1$, *когда* $x \to \pm\infty$;

б) $\max_x \sigma'(x) = \sigma'(0)$;

с) $\sigma'(0) = 1$.

Функции, удовлетворяющие вышеприведенному определению, но имеющие отличные от единицы пределы на бесконечности и производную в нуле, будем называть сигмоидными функциями. Любую сигмоидную функция $S(x)$ можно получить из некоторой сигмоиды $\sigma(x)$, задав два коэффициента: $S(x) = k_2\sigma(k_1 x),\ k_1, k_2 > 0$. Нетрудно видеть, что для любых двух сигмоидных функций $S_1(x)$ и $S_2(x)$ функция $S(x) = S_1(S_2(x))$ также сигмоидная. При доказательстве теоремы о глобальной устойчивости понадобятся неравенства

$$S(x)x > 0 \ \forall x \neq 0, \tag{1}$$

$$[S(x + x_0) - S(x_0)]x > 0 \ \forall x \neq 0,\ \forall x_0, \tag{2}$$

непосредственно вытекающие из определения сигмоиды.

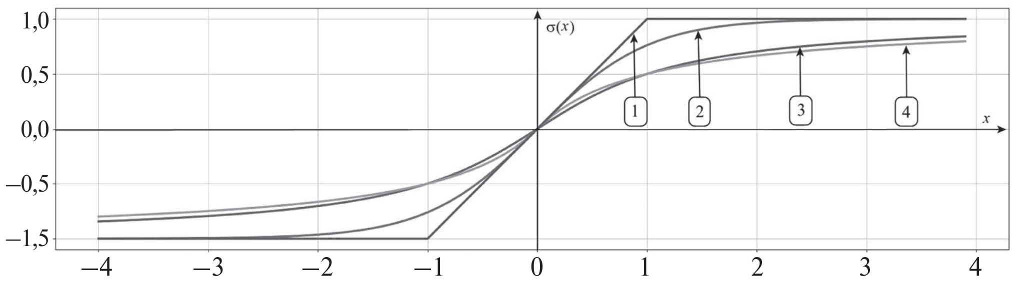

Рис. 1. Примеры функций насыщения: $\mathrm{sat}(x)$ (1); $\tanh(x)$ (2); $2\,\mathrm{arctg}(x)/\pi$ (3); $x/(1+|x|)$ (4).

В семейство функций класса сигмоид входят такие функции, как функция ошибок, арктангенс, гиперболический тангенс и другие функции подобного вида. Предельным случаем сигмоиды является негладкая функция насыщения – сатуратор: $\mathrm{sat}(x) = x$, когда $|x| \leqslant 1$, и $\mathrm{sat}(x) = \mathrm{sign}(x)$ при $|x| > 1$. Примеры функций насыщения – три сигмоиды и сатуратор – приведены на рис. 1. Другие примеры сигмоид с обсуждением их свойств можно найти в [15]. Чаще всего в задачах управления в качестве сигмоиды используется гиперболический тангенс, так как он лучше остальных гладких функций насыщения аппроксимирует сатуратор и, кроме того, его производные легко находятся через саму функцию. В рамках настоящей статьи не имеет значения, какие именно сигмоиды используются в обратной связи, так как доказательство глобальной устойчивости системы справедливо для любых функций, удовлетворяющих вышеприведенному определению.

В настоящей работе предлагается стабилизировать цепочку трех интеграторов с помощью специальной обратной связи, включающей две вложенные сигмоиды. Цель исследования – доказать глобальную устойчивость полученной замкнутой системы при некоторых необременительных условиях на коэффициенты обратной связи.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации в нуле интегратора третьего порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = U(x), \quad x \equiv [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

с помощью гладкой обратной связи $U(x)$, гарантирующей выполнение фазового ограничения

$$|x_3(t)| \leqslant X_3. \tag{4}$$

Такая постановка естественным образом возникает во многих приложениях, например при стабилизации механической системы [11], где переменными состояния служат позиция, скорость и тяга (ускорение), а в качестве управления берется скорость изменения тяги (например, с помощью шагового мотора). Похожая система с фазовым ограничением на третью переменную, но с разрывным управлением, рассмотрена в [16]. Так как тяга в реальных системах ограничена, стабилизирующее управление не должно приводить к нарушению фазового ограничения (4), где X_3 – максимально возможная тяга.

В качестве стабилизирующего предлагается управление

$$U(x) = -k_5(x_3 + k_4\sigma_2(k_3(x_2 + k_2\sigma_1(k_1x_1)))), \tag{5}$$

где σ_1 и σ_2 – произвольные сигмоиды. Обратная связь такого вида гарантирует выполнение фазового ограничения (4) с $X_3 = k_4$ при условии $|x_3(0)| \leqslant k_4$. Действительно, допустим фазовое ограничение выполняется в начальный момент. Переменная $x_3(t)$ достигает локального экстремума на траектории при $U(x) = 0$; из формулы же (5) видно, что управление равно нулю, когда $x_3 = -k_4\sigma_2(\cdot)$. Следовательно, $|x_3(t)|$ не может быть больше k_4, т.е. область $|x_3| \leqslant k_4$ является инвариантным множеством системы. Таким образом, если переменная x_3 физически не может превышать своего предельного значения (как, например, в вышеупомянутом случае механической системы), то при исследовании устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением инвариантного множества. Однако рассмотрим задачу в более общей постановке и докажем устойчивость при любых начальных значениях в R^3. При этом, если начальная точка принадлежит инвариантному множеству, фазовое ограничение (4) будет выполняться при любом t; иначе, начиная с некоторого (зависящего от начальных условий) конечного момента времени.

К преимуществам управления (5) относятся также а) экспоненциальная скорость убывания отклонения вблизи положения равновесия и б) ограниченность при любых, сколь угодно больших отклонениях от положения равновесия при выполнении фазового ограничения в начальной точке.

Коэффициенты k_2 и k_4, устанавливающие пределы изменения сигмоидных функций, называются модельными параметрами, так как их значения определяются моделью исследуемой физической системы и, в отличие от трех других коэффициентов, не могут выбираться произвольно. При заданных k_2 и k_4 параметры k_1, k_3 и k_5 определяют характер переходного процесса [5, 7] и выбираются конструктором системы управления, например с целью оптимизации (в том или ином смысле) ее функционирования.

Без потери общности, модельные параметры можно положить равными единице, уменьшив таким образом количество параметров задачи до трех. Действительно, перейдем к безразмерной модели, применив ту же замену переменных и времени, что и в двумерном случае [5]: $\tilde{t} = k_4t/k_2$, $\tilde{x}_1 = k_4x_1/k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2/k_2$, и определим третью безразмерную переменную как $\tilde{x}_3 = x_3/k_4$. Подставляя новые переменные в систему (3), (5) и переходя к дифференцированию по безразмерному времени, получим безразмерную модель, в которой $\tilde{k}_4 = \tilde{k}_2 = 1$, а три других коэффициента определены формулами $\tilde{k}_1 = k_1k_2^2/k_4$, $\tilde{k}_3 = k_2k_3/k_4$ и $\tilde{k}_5 = k_2k_5/k_4$. Всюду далее будем полагать все переменные и параметры безразмерными и использовать для них прежнее обозначение (без тильды). В безразмерной модели обратная связь (5) принимает вид

$$U(x) = -k_5(x_3 + \sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(k_1x_1)))). \tag{6}$$

Задача исследования – найти условия на коэффициенты, при которых предлагаемая обратная связь является стабилизирующей во всем пространстве; т.е. установить условия глобальной устойчивости системы (3), (6). Приведенное в следующем разделе исследование устойчивости основано на построении интегральной функции Ляпунова замкнутой системы. Будет доказано, что выполнение необходимых условий устойчивости линеаризованной в окрестности нуля системы достаточно для того, чтобы функция Ляпунова и ее производная в силу системы были соответственно положительно и отрицательно определены во всем пространстве, что гарантирует глобальную устойчивость системы. При применении же других известных подходов к исследованию устойчивости, основанных, например, на построении функции Лурье–Постникова [17] или на погружении в класс линейных нестационарных систем с последующим применением методов абсолютной устойчивости [4, 18, 19], удается, как правило, доказать только локальную устойчивость (даже когда исследуемая система устойчива в целом) и ограничиться построением оценки инвариантной области притяжения.

3. Условия глобальной устойчивости

Т е о р е м а 1. *Система* (3), (6), *где* $\sigma_1(\cdot)$ *и* $\sigma_2(\cdot)$ – *произвольные сигмоиды, глобально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все коэффициенты положительны и при этом* $k_5 > k_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Для того чтобы система была глобально устойчива, необходимо, чтобы была устойчива линеаризованная в окрестности нуля система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -k_5x_3 - k_5k_3x_2 - k_5k_3k_1x_1.$$

Применяя критерий Гурвица к системе, находим, что для устойчивости линеаризованной системы необходима положительность всех коэффициентов и выполнение условия $k_5 > k_1$.

Достаточность. Пусть коэффициенты k_1, k_3 и k_5 положительны. Рассмотрим функцию

$$V(x) = k_5^2\int\limits_0^{x_1}\sigma_2(k_3\sigma_1(k_1s))ds + k_5\int\limits_0^{x_2}\sigma_2(k_3(s + \sigma_1(k_1x_1)))ds + \frac{1}{2}(x_3 + k_5x_2)^2 \tag{7}$$

и докажем, что она является функцией Ляпунова системы (3), (6).

Обозначим через Φ_1 и Φ_2 первое и второе соответственно интегральные слагаемые в (7) и докажем, что их сумма, а значит и вся функция $V(x)$, положительна для всех $x \in R^3$. Преобразуем второе слагаемое Φ_2, сделав замену $\tilde{s} = s + \sigma_1(k_1 x_1)$:

$$\Phi_2 = k_5 \int\limits_{\sigma_1(k_1x_1)}^{x_2+\sigma_1(k_1x_1)} \sigma_2(k_3\tilde{s})d\tilde{s} = k_5 \int\limits_0^{x_2+\sigma_1(k_1x_1)} \sigma_2(k_3\tilde{s})d\tilde{s} - k_5 \int\limits_0^{\sigma_1(k_1x_1)} \sigma_2(k_3\tilde{s})d\tilde{s}.$$

Во втором слагаемом правой части последней формулы сделаем неявную (взаимно-однозначную в силу монотонности функции σ_1) замену переменной интегрирования $\tilde{s} = \sigma_1(k_1 s)$, откуда $d\tilde{s} = k_1\sigma_1'(k_1 s)ds$, где штрих означает дифференцирование по аргументу. Найдем сумму Φ_1 и Φ_2:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = k_5 \int\limits_0^{x_1} \sigma_2(k_3\sigma_1(k_1s))[k_5 - k_1\sigma_1'(k_1s)]ds + k_5 \int\limits_0^{x_2+\sigma_1(k_1x_1)} \sigma_2(k_3\tilde{s})d\tilde{s}.$$

Второй интеграл в правой части формулы очевидно положителен в силу (1). Так как производная сигмоиды по аргументу удовлетворяет условию $\sigma'(s) \leqslant \leqslant 1$ и по условию теоремы $k_5 > k_1$, то

$$k_5 - k_1\sigma_1'(k_1s) > 0, \tag{8}$$

откуда следует положительность первого интеграла и, следовательно, функции $V(x)$ при всех $x \neq 0$.

Очевидно также, что $V(x)$ стремится к бесконечности при $||x|| \to \infty$. Далее, дифференцируя $V(x)$ в силу системы (3), (6) и опуская аргумент k_1x_1 функций σ_1 и σ_1' для сокращения записи, получим

$$\begin{gathered}\dot{V} = k_5^2\sigma_2(k_3\sigma_1(\cdot))x_2 + k_5x_2 \int\limits_0^{x_2} \sigma_2'(k_3(s+\sigma_1(\cdot)))k_3\sigma_1'(\cdot)k_1ds + \\ + k_5\sigma_2(k_3(x_2+\sigma_1(\cdot)))x_3 + (x_3+k_5x_2)[-k_5(x_3+\sigma_2(k_3(x_2+\sigma_1(\cdot)))+k_5x_3] = \\ = k_5^2\sigma_2(k_3\sigma_1(\cdot))x_2 - k_5^2\sigma_2(k_3(x_2+\sigma_1(\cdot)))x_2 + \\ + k_1k_3k_5\sigma_1'(\cdot)x_2 \int\limits_0^{x_2} \sigma_2'(k_3(s+\sigma_1(\cdot)))ds.\end{gathered}$$

Преобразуем интеграл в правой части последнего выражения:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{x_2} \sigma_2'(k_3(s+\sigma_1(\cdot)))ds = \int\limits_{\sigma_1(\cdot)}^{x_2+\sigma_1(\cdot)} \sigma_2'(k_3\tilde{s})d\tilde{s} = \\ = \frac{1}{k_3}\sigma_2(k_3(x_2+\sigma_1(\cdot))) - \frac{1}{k_3}\sigma_2(k_3\sigma_1(\cdot)).\end{gathered}$$

Подставляя полученное выражение в формулу для $\dot V(x)$, получим

$$\dot V(x) = k_5\sigma_2(k_3\sigma_1(\cdot))x_2(k_5 - k_1\sigma_1'(\cdot)) - k_5\sigma_2(k_3(x_2+\sigma_1(\cdot)))x_2(k_5 - k_1\sigma_1'(\cdot)) = \\ = -k_5(k_5 - k_1\sigma_1'(\cdot))[\sigma_2(k_3(x_2+\sigma_1(\cdot))) - \sigma_2(k_3\sigma_1(\cdot))]x_2.$$

Произведение выражения в квадратных скобках на x_2 положительно в силу (2), откуда с учетом (8) следует, что производная отрицательно определена для любых $x_2 \neq 0$. Производная обращается в ноль только на множестве $x_2 = 0$, которое не содержит ни одной целой траектории, кроме $x = 0$.

Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина–Красовского [20] и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (3), (6) в целом. Теорема доказана.

4. Численные примеры

В качестве иллюстрации приведены результаты численных расчетов для обратной связи (6) в виде вложенных гиперболических тангенсов с коэффициентами $k_1 = 1$, $k_3 = 3$ и $k_5 = 5$. На рис. 2 изображена инвариантная область системы, ограниченная поверхностью уровня функции Ляпунова (7) $V(x) = k_5^2$. Для большей наглядности на рис. 3 показаны проекции на плоскость (x_1, x_2) шести сечений поверхности уровня (на рис. 2, эти сечения выделены жирными линиями) плоскостями $x_3 = c_i$, $c_1 = -26$, $c_2 = -16$, $c_3 = -6$, $c_4 = 4$, $c_5 = 14$, $c_6 = 24$.

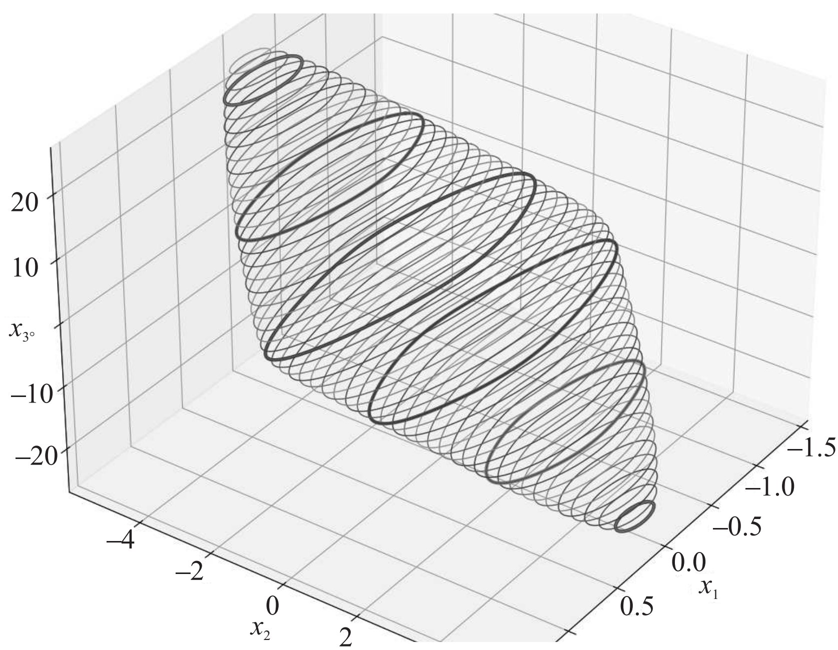

Рис. 2. Поверхность уровня функции Ляпунова (7).

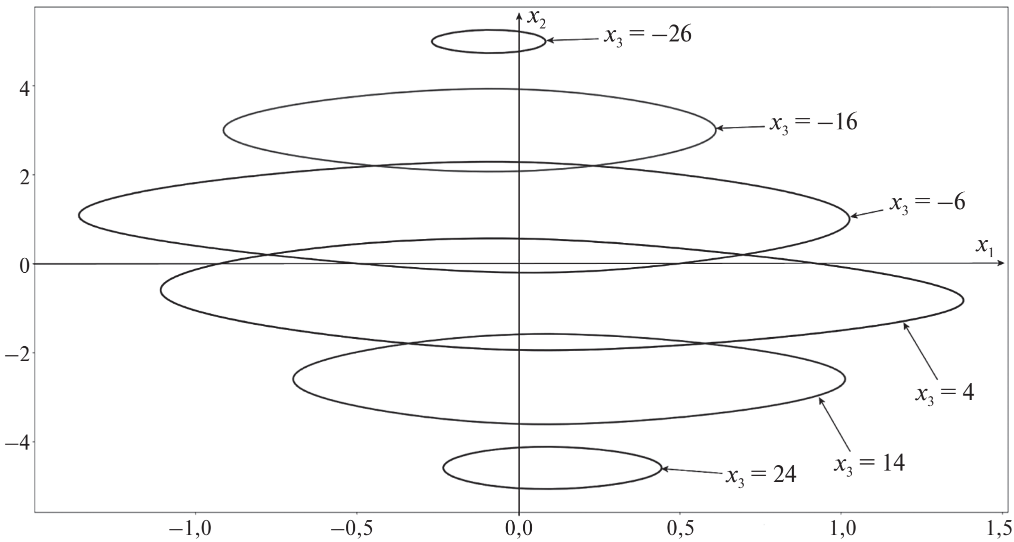

Рис. 3. Сечения инвариантной области плоскостями $x_3 = \mathrm{const}$.

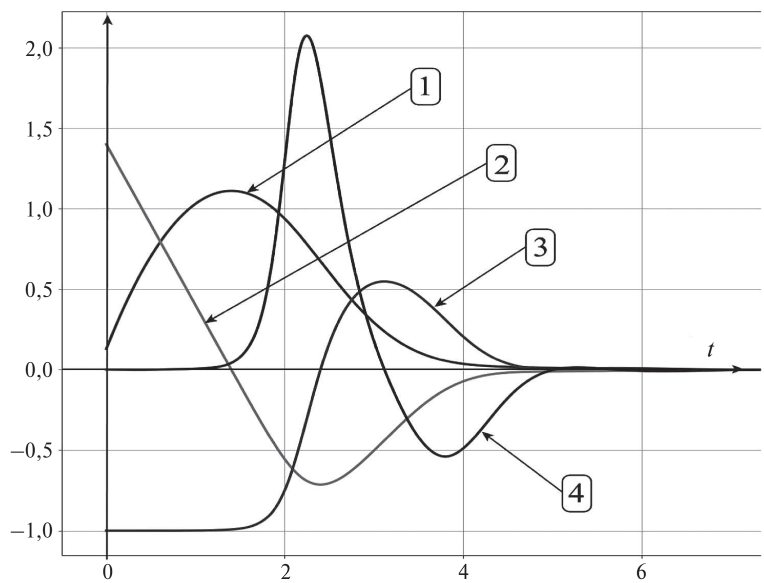

Рис. 4. Графики зависимостей от времени отклонения $x_1(t)$ (1), скорости $x_2(t)$ (2), ускорения $x_3(t)$ (3) и управления $U(t)$ (4).

Результаты решения задачи стабилизации системы для начальных условий $x_1(0) = 0{,}1$, $x_2(0) = 1{,}4$, $x_3(0) = -1$ представлены на рис. 4, демонстрирующем эффективность стабилизации. Кривые, помеченные цифрами 1, 2, 3 и 4, показывают графики зависимостей от времени отклонения x_1, скорости x_2, ускорения x_3 и управления U соответственно. Хотя в начальный момент времени система движется в противоположном от положения равновесия направлении, величина отклонения после естественного роста на начальном этапе быстро (экспоненциально) убывает, фазовое ограничение выполняется для любого t, управление умеренно ограничено и не приводит к перерегулированию.

5. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации цепочки трех интеграторов с помощью непрерывного управления, гарантирующего выполнение фазового ограничения на третью переменную состояния. С помощью перехода к безразмерным переменным исходная зависящая от пяти коэффициентов обратной связи задача сведена к исследованию трехпараметрической системы. Обсуждаются преимущества предлагаемой обратной связи в виде вложенных сигмоидных функций. Главный результат работы – построение функции Ляпунова, с помощью которой установлены достаточные (совпадающие с необходимыми) условия глобальной устойчивости замкнутой системы. Приведены численные примеры, иллюстрирующие эффективность стабилизации с помощью предлагаемой обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
2. *Teel A.R.* Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls // Sys. Cont. Lett. 1992. V. 18. No. 3. P. 165–171.
3. *Olfati-Saber R.* Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles // Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
4. *Li Y., Lin Z.* Stability and Performance of Control Systems with Actuator Saturation. Basel: Birkhauser, 2018. P. 706.
5. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных сатураторов // АиТ. 2024. № 4. С. 55–60.
6. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS). 2020. V. 1340. P. 236–249.
7. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Optimizing Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. P. 191–202.
8. *Antipov A., Kokunko J., Krasnova S.* Dynamic Models Design for Processing Motion Reference Signals for Mobile Robots // J. Intelligent Robot. Syst. 2022. V. 105. P. 1–16.
9. *Hua M.-D., Samson C.* Time Sub-optimal Nonlinear Pi and Pid Controllers Applied to Longitudinal Headway Car Control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.

10. *Морозов Ю.В., Пестерев А.В.* Глобальная стабилизация интегратора 2-го порядка обратной связью в виде вложенных сигмоид // Известия РАН. Теория и системы управления. 2024. № 3 (принята к публикации).

11. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной // АиТ. 2004. № 8. С. 14–38.

12. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13781. Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 66–78.

13. *Морозов Ю.В., Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость гибридной аффинной системы 4-го порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 5. С. 3–15.

14. *Teel A.R.* A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation // Trans. Autom. Contr., IEEE, 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.

15. *Mazhar N., Malik F.M., Raza A., Khan R.* Predefined-Time Control of Nonlinear Systems: A Sigmoid Function Based Sliding Manifold Design Approach // Alexandria Engineer. J. 2022. V. 61. P. 6831–6841.

16. *Utkin V.I., Jingxin Shi.* Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions // Proc. of 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996. V. 4. P. 4591–4596.

17. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. № 3. С. 246–248.

18. *Рапопорт Л.Б.* Оценка области притяжения в задаче управления колесным роботом // АиТ. 2006. № 9. С. 69–89.

19. *Generalov A., Rapoport L., Shavin M.* Attraction Domains in the Control Problem of a Wheeled Robot Following a Curvilinear Path over an Uneven Surface // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. pp. 176–190.

20. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 04.03.2024

После доработки 07.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024